PEDOMAN PENILAIAN TES URAIAN
Mata Kuliah: Fisika Matematika I

<table>
<tr><th>No</th><th>Aspek/konsep yang dinilai</th><th>Skor</th></tr>
<tr><td>1</td><td>Penyelesaian:
Ketinggian pencapaian kelereng secara berturut-turut adalah :
$1, \frac{3}{4}, \left(\frac{3}{4}\right)^2, \left(\frac{3}{4}\right)^3, \ldots\ldots$
Jadi, jarak total yang ditempuh kelereng adalah jumlah tinggi awal kelereng 1 m, ditambah 2 kali jumlah semua tinggi berikutnya (karena kelereng menempuh lintasan tegak bolak-balik yang sama panjang), yaitu :
$1, 2\left(\frac{3}{4}\right), 2\left(\frac{3}{4}\right)^2, 2\left(\frac{3}{4}\right)^3, + \ldots\ldots$
Penyataan jumlah bilangan yang dimulai dari suku kedua adalah deret ukur dengan a = 2(3/4) = 3/2, dan r = ¾. Karena itu jumlahnya adalah:
$S = \frac{(3/2)}{(1-(3/4))} = 6$
Jadi, deret di atas konvergen. Dari jumlah itu diperoleh:
d = 1 + S = 7 m
Jadi jarak total yang ditempuh kelereng adalah 7 m.</td><td>1

1

1

1</td></tr>
<tr><td>2</td><td>Penyelesaian :
Untuk menentukan S, harus dilakukan penjumlahan sebagian deret :
$S_1 = \frac{1}{2}$, $S_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{2}{3}$, $S_3 = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} = \frac{3}{4}$,
Secara umum:
$S_n = \frac{n}{(n+1)}$
Sehingga:
$S = \lim_{n \to \infty} S_n = \lim \frac{n}{(n+1)} = 1$</td><td>1

1</td></tr>
<tr><td>3</td><td>Penyelesaiannya:
Suku ke-n deret di atas adalah $a_n = \frac{(-x)^n}{2^n}$
Nisbah suku berturutannya :
$r_n = \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{(-x)^{n+1}}{2^{n+1}}\right|\left|\frac{2^n}{(-x)^n}\right| = \left|\frac{x}{2}\right|$
Kemudian mengambil limitnya
$r = \lim_{n \to \infty} r_n = \lim_{n \to \infty} \left|\frac{x}{2}\right| = \left|\frac{x}{2}\right|$
Perhatikan bahwa kita telah mengambil nilai mutlak nisbah, karena variable x dapat bernilai positif atau negative. Agar deret (1) konvergen, maka menurut uji nisbah, disyaratkan $\left|\frac{x}{2}\right| < 1$ atau $-2 < x < 2$. Kita harus menyelidiki konvergensinya untuk nilai x di kedua</td><td>1

1</td></tr>
</table>

	selang ini. Untuk x = 2, deret pangkat (1) memberi deret bilangan tetap: $1 + 1 + 1 + 1 + \ldots +$ Suatu deret ukur dengan pembanding r =1, karena itu deret ini divergen. Untuk x = 2, deret pangkat (1) memberi deret bilangan tetap: $1 - 1 + 1 - 1 + \ldots +$ Suatu deret bolak balik dengan $\|a_n\| = 1$. Karena $\|a_{n+1}\| = \|a_n\|$, maka deret ini divergen. Jadi selang konvergensi deret (1) adalah $-2 < x < 2$.	1 1
4	Penyelesaian: Turunan semua orde fungsi $f(x) = e^x$ terhadap x disekitar x = 0, adalah. $f(x) = f'(x) = \ldots f^{(n)}(x) = \ldots = e^x$ Karena itu, $f(0) = f'(0) = \ldots f^{(n)}(x) = \ldots = 1$ Dengan demikian, uraian deret taylornya disekitar x = 0, adalah $f(x) = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \ldots + \frac{1}{n!}x^n + \ldots$ Untuk menentukan selang konvergensi deret pangkatnya digunakan uji nisbah. Tinjau: $r = \lim_{n\to\infty}\left\|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right\| = \lim_{n\to\infty}\left\|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right\|\left\|\frac{n!}{x^n}\right\| = \|x\| \lim_{n\to\infty}\left\|\left(\frac{1}{n+1}\right)\right\| = \|x\|.0 = 0 < 1$ Jadi, selang konvergensinya adalah: $-\infty < x < \infty$.	1 1 1
5	Penyelesaian: $r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$ dan $\theta = \arctan(-2/2) = 7\pi/4$ Jadi, $2 + 2i = 2\sqrt{2}(\cos 7\pi/4 - i \sin 7\pi/4)$	1 1
6	Penyelesaian: Tulis dahulu kedua belah ruas persamaannya dalam bentuk baku : $3 + i(2y) = y + i(-1)$ Kemudian samakan bagian real dan imajiner kedua belah ruas, diperoleh persamaan real: $3 = y$, dan $2x = 1$ Pemecahannya adalah $x = -1/2$, $y = 3$.	1 1
7	Penyelesaian: Pertama tuliskan dahulu pernyataan uraian kompleksnya: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1+i)^n}{n} = \frac{(1+i)}{1} + \frac{(1+i)^2}{2} + \frac{(1+i)^3}{3} + \ldots$ $= 1 + i + \frac{1}{2}(1 - 2i - i^2) + \frac{1}{3}(1 + 3i - 3i^2 + i^3) + \ldots$	1

	Dengan menghitung masing-masing sukunya dan menggunakan i^2 = -1, kemudian mengelompokkan bagian imajinernya, diperoleh: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1+i)^n}{n} = \left\|1+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{3}+\frac{3}{3}\right)+\ldots\right\| + i\left\|1+\left(\frac{2}{2}\right)+\left(\frac{3}{3}-\frac{1}{3}\right)+\ldots\right\|$	1
8	Penyelesaian: Dengan uji nisbah, diperoleh $r = \lim_{n\to\infty}\left\|\frac{(1+i)^n}{(1+i)^{n+1}}\right\| = \left\|\frac{1}{(1+i)}\right\| = \frac{1}{\sqrt{2}} < 1$ Karena r < 1, maka deret ini adalah konvergen mutlak.	1
9	Penyelesaian: Suku ke-n deret di atas adalah $Cn(z) = \frac{z^n}{n!},$ Jadi, $r_n = \left\|\frac{c_{n+1}}{c_{n+1}}\right\| = \left\|\frac{z^{n+1}}{(n+1)!}\frac{n!}{z^n}\right\| = \frac{1}{(n+1)}\|z\|$ Karena, $r = \lim_{n\to\infty} r_n = 0 < 1$, untuk semua z, maka deret di atas adalah konvergen mutlak untuk semua nilai z.	1 1
10	Penyelesaian: Jika z = 1 – I, maka r = $\sqrt{2}$, dan θ = 5π/4. Jadi bentuk eksponensialnya adalah $z = re^{i\theta} = \sqrt{2}\,e^{5i\pi/4}$, sehingga : $(1-i)^4 = \left(\sqrt{2}e^{5i\pi/4}\right)^4 = 4e^{5i\pi} = -4$	1
11	Penyelesaian: $\sin(\pi + i\,Ln\,3) = \frac{e^{i(\pi+iLn3)} - e^{-i(\pi+iLn3)}}{2i} = \frac{e^{i\pi}e^{-Ln3} - e^{-i\pi}e^{Ln3}}{2i}$ Menurut definisi fungsi logaritma $e^{\ln 3} = 3$, dan $e^{-Ln\,3} = 1/e^{\ln 3} = 1/3$, sedangkan $e^{i\pi} = \cos\pi + i\sin\pi = -1$, dan $e^{-i\pi} = 1/e^{i\pi} = 1/(-1) = -1$, Jadi. $\sin(\pi + i\ln 3) = \frac{(-1)(1/3-3)}{2!} = -\frac{4}{3}i$	1 1
12	Penyelesaian: Diketahui bahwa pegas vertical merupakan gerak getaran harmonis yang mempunyai persamaan gerak : y = A sin ωt atau y = a cos ωt (1) dengan y kedudukan vertical benda terhadap titik setimbang pegas dengan beban. Karena persamaan gerak ini dalam bentuk sinus atau cosinus, maka digunakan fungsi eksponen bilangan kompleks yang sesuai, yaitu :	1

	$y = A e^{i\omega t}$ (2) Sehingga kita dapat mencari kecepatan $\frac{dy}{dt}$ dan percepatan $\frac{d^2y}{dt^2}$: $\frac{dy}{dt} = A i\omega e^{i\omega t}$ (3) $\frac{d^2y}{dt^2} = A(i\omega)^2 e^{i\omega t} = -A\omega^2 e^{i\omega t}$ (4) Gunakan Hukum Newton II dan Hukum Hooke (dengan mengabaikan gaya berat pada benda): $\sum F = ma$ (5) $-ky = m\frac{d^2y}{dt^2}$ (6) Sisipkan persamaan (2) dan (4) ke dalam persamaan (6), sehingga diperoleh : $-kAe^{i\omega t} = -mA\omega^2 e^{i\omega t}$ $\omega^2 = \frac{k}{m}$ atau $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ $T = 2\pi f = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$ Jadi, periode pada pegas vertikal ini adalah ini adalah T = $2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$.	1 1 1
13	Penyelesaian: $C = AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -3 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ $= \begin{bmatrix} (1)(2)+(2)(1)+(-1)(3) & (1)(4)+(2)(-1)+(-1)(1) \\ (3)(2)+(1)(1)+(0)(3) & (3)(4)+(1)(-1)+(1)(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 14 & 11 \end{bmatrix}$	1
14	Penyelesaian: Kofaktor dari elemen kolom ketiga, -1, 1, dan 1, berturut-turut dinyatakan oleh K_{13}, K_{23}, K_{33} adalah: $K_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 4$ $K_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -2$ $K_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -3$	1

	Sehingga determinan matriknya adalah: $\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = (-1)K_{13} + (1)K_{23} + (1)K_{33} = (-1)(4) + (1)(-2) + (1)(-3) =$	1
15	Penyelesaian: $D = \det(A) = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -9\,;$ $\quad U_x = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 7 & -1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -27$ $U_y = \begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 1 & 7 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 18\,;$ $\quad U_z = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 7 \\ 2 & 2 & 4 \end{vmatrix} = -18$ Maka menurut metode Cramer, pemecahan untuk x, y, dan z berturut-turut adalah: $x = \frac{U_x}{D} = \frac{-27}{-9} = 3;\ \ y = \frac{U_y}{D} = \frac{18}{-9} = -2;\ \ z = \frac{U_z}{D} = \frac{-18}{-9} = 2$	1 1
16	Penyelesaian: Pada contoh di atas kofaktor dari elemen-elemennya pada kolom ketiga, yakni K_{13}, K_{23}, K_{33}. Dengan menghitung elemen kolom 1 dan 2, diperoleh matriks kofaktor $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \mathrm{cof}(A) = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 4 \\ -3 & 4 & -2 \\ 0 & -3 & -3 \end{bmatrix}$ Karena adjoint dari A adalah transpose dari cof (A), maka $\mathrm{adj}(A) = \begin{bmatrix} -3 & -3 & 0 \\ 1 & 4 & -3 \\ 4 & -2 & -3 \end{bmatrix}$ Determinan dari A juga telah dihitung pada contoh soal sebelumnya, yang hasilnya adalah det(A) = -9. Dengan demikian invers matriks A adalah $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \mathrm{x}\, \mathrm{adj}(A) = -(1/9) \begin{bmatrix} -3 & -3 & 0 \\ 1 & 4 & -3 \\ 4 & -2 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/3 & 1/3 & 0 \\ -1/9 & -4/9 & 1/3 \\ -4/9 & 2/9 & 1/3 \end{bmatrix}$	1 1 1
17	Penyelesaian : Dari persamaan Linear diperoleh: $x = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \qquad A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ Dari persamaan di atas dapat dihitung :	1

<table>
<tr><td></td><td>

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 - 1 = 1$$

Dan

$$K = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Jadi

$$K^T = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Dengan menggunakan metode matriks kofaktor

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} K^T = \frac{1}{1} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Sehingga penyelesaian persamaan linear dapat dilakukan dengan menggunakan persamaan sebagai berikut:

$$X = A^{-1}b$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1+0+0 \\ -1+0+1 \\ 2+0+0 \end{bmatrix} =$$

</td><td>1
1
1
1
1</td></tr>
<tr><td>18</td><td>

Penyelesaian:

Untuk mencari nilai eigen harus dibentuk ke dalam persamaan karakteristik kemudian mencari akar-akar karakteristiknya. Persamaan karakteristik yang bersangkutan adalah:

$$\det(A - \lambda I) = \begin{bmatrix} (1-\lambda) & 1 & 3 \\ 1 & (5-\lambda) & 1 \\ 3 & 1 & (1-\lambda) \end{bmatrix} = 0$$

Atau, $\lambda^3 - 7\lambda^2 + 36 = 0$

Akar-akarnya adalah:

$\lambda_{(1)} = 6, \quad \lambda_{(2)} = 3, \quad \lambda_{(3)} = -2$

Sedangkan untuk menentukan vector-eigen dilakuakn dengan menuliskan persamaan eigen dalam komponen vector-eigen kemudian mencari pemecahannya untuk setiap nilai-eigen.

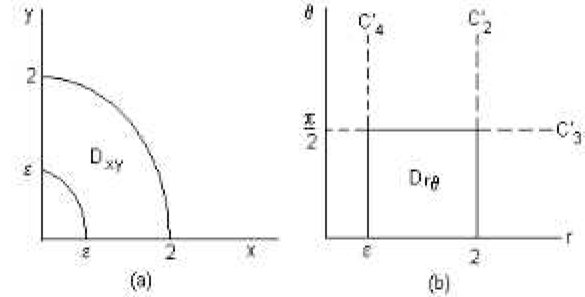
Karena A berukuran (3 x 3), maka vector-eigen X memiliki tiga komponen,

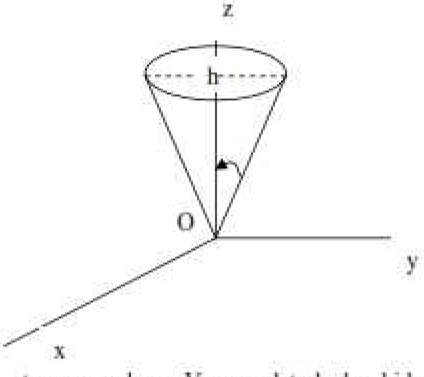
$X^T = [x \quad y \quad z]^T$, sehingga system persamaan nilai-eigen yang bersangkutan adalah:

</td><td>1
1</td></tr>
</table>

	$(1-\lambda)x + y + 3z = 0$ $x + (5-\lambda)y + 3z = 0$ $x + y + (3-\lambda)z = 0$ Untuk memecahkan persamaan homogen ini, pilih secara bebas nilai bagi x, atau y, atau z; kemudian sisipkan satu nilai tertentu, dan pecahkan bagi variable yang sisa. Misalkan dipilih x = 1, maka pernyataan komponen eigen yang bersangkutan adalah: Untuk: $\lambda_{(1)} = 6, \quad X^T_{(1)} = [1\ \ 2\ \ 1]^T$ $\lambda_{(2)} = 3, \quad X^T_{(2)} = [1\ \ -1\ \ 1]^T$ $\lambda_{(3)} = -2, \quad X^T_{(3)} = [1\ \ 0\ \ -1]^T$ Karena persamaan linear matriks:$aX_{(1)} + b\,X_{(2)} + cX_{(3)} = 0$, hanyalah dipenuhi untuk a = b = c = 0, maka ketiga vector-eigen ini bebas linear. Dengan menormalisasi, diperoleh vector-eigen ternormalisasi: $\hat{X}^T_{(1)} = \frac{1}{\sqrt{6}} X^T_{(1)}, \quad \hat{X}^T_{(2)} = \frac{1}{\sqrt{3}} X^T_{(2)}, \quad \hat{X}^T_{(3)} = \frac{1}{\sqrt{2}} X^T_{(3)}$ Karena, $\hat{X}^T_{(1)}\hat{X}_{(2)} = \hat{X}^T_{(1)}\hat{X}^T_{(3)} = \hat{X}^T_{(2)}\hat{X}_{(3)} = 0$, maka ketiga vector-eigen ini membentuk suatu himpunan vector-eigen ortonormal.	1 1 1
19	Penyelesaian: $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(xy^2 - \sin(xy)\right) = y^2 - y\cos(xy)$ $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(xy^2 - \sin(xy)\right) = 2xy - x\cos(xy)$	1 1
20	Penyelesaian: Karena $\frac{\partial f}{\partial x} = y^2 - y\cos(xy)$ dan $\frac{\partial f}{\partial y} = 2xy - x\cos(xy)$ kontinu, maka diferensial totalnya adalah: $df = \left[y^2 - y\cos(xy)\right]dx + \left[2xy - x\cos(xy)\right]dy$	1
21	Penyelesaian: $\frac{\partial f}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial u}$ $= (2x+2y)(1) + (2x - \ln z)(1) + (-y/z)(2)$ $= 4x + 2y - \ln z - 2y/z$ $\frac{\partial f}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial v}$ $= (2x+2y)(2v) + (2x - \ln z)(-2v) + (-y/z)(0)$ $= 4vy + 2v\ln z$	1 1

22	Penyelesaian: Dari fungsi implisit: $\phi(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$, $\frac{\partial\phi}{\partial x} = 2x,\ \frac{\partial\phi}{\partial y} = 2y,\ \frac{\partial\phi}{\partial z} = 2z$ Maka: $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{(\partial\phi/\partial x)}{(\partial\phi/\partial z)} = -\frac{x}{z}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{(\partial\phi/\partial y)}{(\partial\phi/\partial z)} = -\frac{y}{z}$,	1 1 1
23	Penyelesaian: $df = \left(\frac{\partial f}{\partial p}\right)_{V,T} dp + \left(\frac{\partial f}{\partial V}\right)_{p,T} dV + \left(\frac{\partial f}{\partial T}\right)_{p,V} dT = 0$ Jika salah satu variable p, V, atau T dibuat tetap, maka salah satu dp, dV, atau dT sama dengan nol.Diperoleh: $\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p = -\left[\frac{\left(\frac{\partial f}{\partial T}\right)_{p,V}}{\left(\frac{\partial f}{\partial V}\right)_{p,T}}\right] = \frac{1}{\left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_p}$ $\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_V = -\left[\frac{\left(\frac{\partial f}{\partial p}\right)_{T,V}}{\left(\frac{\partial f}{\partial T}\right)_{p,V}}\right] = \frac{1}{\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V}$ $\left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_p = -\left[\frac{\left(\frac{\partial f}{\partial V}\right)_{p,T}}{\left(\frac{\partial f}{\partial p}\right)_{T,V}}\right] = \frac{1}{\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T}$ Perkalian ketiga turunan parsial indigen cara sebagai berikut : $\left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_T \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p = -\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_V$ Maka $\left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_T \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p \left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_V = -1$	1 1 1 1 1
24	Penyelesaian: Integralkan terhadap y dengan mempertahankan x tetap: $\int_0^{x^2} (xy)\, dy = \frac{1}{2} xy^2 \Big]_0^{x^2} = \frac{1}{2} x\left(\left(x^2\right)^2 - 0^2\right) = \frac{1}{2} x^5$ Kemudian integralkan hasil di atas terhadap x, diperoleh:	1

	$I = \int_0^1 \left(\frac{1}{2}x^5\right)dx = \frac{1}{12}x^6\Big]_0^1 = \frac{1}{12}$	1
25	Penyelesaian: *Langkah 1: tentukan peralihan integran f (x, y) ke g (r, q).* Karena, $f(x, y) = xy$, maka terhadap transformasi koordinat polar (r, θ), dinyatakan dalam bentuk: $g(r, \theta) = f(x(r, \theta), y(r, \theta)) = r^2 \cos\theta \sin\theta$. *Langkah II: menggambarkan daerah integrasi D_{xy}*  Gambar (a) . daerah integrasi D_{xy} dan (b) peta $D_{r\theta}$. Dari gambar, D_{xy} tampak dibatasi oleh tiga kurva, yaitu : C_1 : $y = 0$, $0 \le x \le 2$, C_2 : $x^2 + y^2 = 4$, C_3 : $x = 0$, $0 \le y \le 2$, Yang diperlihatkan pada gambar bagian (a). Karena factor Jacobi, $J = r$, bernilai nol di titik O, $r = 0$, maka untuk menghindari kesingularan ini, dibentuk kurva batas ke-4, C_4, berupa lingkaran: C_4 : $x^2 + y^2 = \varepsilon^2$, $0 < \varepsilon ,< 2$ Dan pada akhirnya mengambil limit $\varepsilon \to 0$. *Langkah 3. Menggambarkan peta daerah integrasi D_{rq}:* Untuk menggambarkan peta daerah D_{xy} pada bidang $r\theta$, kita petakan masing-masing kurva batas lalu mencirikan daerah batas yang diperoleh. C_1 : $y = 0$, $\varepsilon \le x < 2$, dipetakan ke kurva: C'_1: $r = \sqrt{x^2 + y^2} = x$, $\theta = \tan^{-1}(y/x) = 0$ Pada bidang (r, θ), x adalah parameter kurva C'; jadi, C' adalah selang terbuka $\varepsilon \le r < 2$ pada sumbu r. C_2 : $x^2 + y^2 = 4$, dipetakan ke kurva: C'_2: $r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{4} = 2$, $\theta = \tan^{-1}(y/x) = \tan^{-1}(y/\sqrt{4 - y^2}\ )$ Disini y adalah parameter kurva C'_2 pada bidang (r,θ). Karena $0 \le y \le 2$, maka $0 \le \theta \le \pi/2$. Jadi C'_2 adalah penggal garis sejajar sumbu θ yang memotong sumbu r di $r = 2$. Dengan cara yang sama, C_3 dipetakan ke penggal garis C'_3 sejajar sumbu r, yangmemotong sumbu θ di $\theta = \pi/2$, dan terletak antara $\varepsilon \le$	1 1 1 1 1

	$r < 2$. C_4 dipetakan ke penggal garis C'_3 sejajar sumbu θ, antara $0 \le \theta \le \pi/2$, yang memotong sumbu r di $r = \varepsilon < 2$. Keempat kurva dalam bidang (r, θ) ini, membatasi daerah $D_{r\theta}$ berbentuk empat persegi panjang. Seperti gambar (b). Jadi, terhadap koordinat polar, integral lipat dua mejadi: $I = \iint_{D_{r\theta}} \left(r^2 \cos\theta \sin\theta\right)(r)\,dr d\theta$ $= \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{r=\varepsilon}^{2} \left(r^3 dr\right) \int_{\theta=0}^{\pi/2} \left(\cos\theta \sin\theta\right) d\theta$ $= \lim_{\varepsilon\to 0} \left[\frac{1}{4} r^4\right]_{\varepsilon}^{2} . \left[-\frac{1}{2}\cos^2\theta\right]_{\theta=0}^{\pi/2} = 2$	1
26	Penyelesaian: Jika $f(x, y, z) = \rho(x, y, z)$ adalah rapat massa benda yang menempati volume ruang V, maka massa total benda adalah: $M = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \rho(x_k, y_k, z_k)\,dV_k = \iiint p\,dV = c \iiint dxdydz$ Untuk menggunakan koordinat silinder, pertama lakukan transformasi koordinat : $x = ax'$; $y = by'$; $z = z'$ yang memiliki factor Jacobi $J = ab$. Persamaan permukaan kerucut eliptik dalam koordinat (x', y', z) adalah : $z^2 = h^2 (x'^2 + y'^2)$, yang memperlihatkan simetri silinder terhadap sumbu-z. Selanjutnya, terhadap koordinat (x', y', z) ini, lakukan transformasi ke koordinat silinder (r, θ, z) : $x' = r \cos\theta$; $y' = r \sin\theta$; $z = z$ dalam mana persamaan kerucut tersederhanakan menjadi : $z^2 = h^2 r^2$ Pada gambar di bawah,  tampak volume V normal terhadap bidang $x'y'$, dengan permukaan batas bawah adalah permukaan kerucut eliptik $z_1 = hr$ dan bidang $z_2 = h$ sebagai batas atasnya. Jadi integral berulang massa benda adalah :	1 1 1 1 1

	$M = abc\iiint_V dx'dy'dz' = (abc)\iint_D\left(\int_{hr}^{h} dz\right) r dr d\theta$ $= (abc)\iint_D h(1-r) r dr d\theta$ Proyeksi gabungan permukaan batas volume ruang ini pada bidang x'y' adalah piringan lingkaran dengan batas lingkaran berjari-jari r = 1.Jadi. $M = (abc)\int_{r=0}^{1}\int_{\theta=0}^{2\pi} h(1-r) r\, dr\, d\theta = \frac{\pi}{3}h(abc)$ Untuk menghitung koordinat z pusat massa benda, kita hitung dahulu momen massanya terhadap bidang xy, M_{xy} Dengan cara yang sama diperoleh : $M_{xy} = abc\iiint_V z\, dx'dy'dz' = (abc)\iint_D\left(\int_{hr}^{h} z dz\right) r dr d\theta$ $= \frac{1}{2}(abc)\iint_D h^2(1-r^2) r dr d\theta$ $= \frac{1}{2}(abc)h^2 \int_{r=0}^{1}\int_{\theta=0}^{2\pi} (r-r^3)\, dr\, d\theta = \frac{\pi}{4}h^2(abc)$ Jadi, koordinat Z pusat massa benda, adalah: $Z = \frac{M_{xy}}{M} = \frac{\left(\frac{\pi}{4}h^2(abc)\right)}{\left(\frac{\pi}{3}h(abc)\right)} = \frac{3}{4}h$	1 1 1 1
27	Penyelesaian: $u + v = \left(2\hat{i} - 3\hat{j} + 6\hat{k}\right) + \left(4\hat{i} - 2\hat{j} - 4\hat{k}\right) = 6\hat{i} - 5\hat{j} + 2\hat{k}$ Besarnya: $\lvert u + v\rvert = \sqrt{(6)^2 + (-5)^2 + (2)^2} = \sqrt{65} = 8{,}06$	1 1
28	Penyelesaian: $u.v = u_x v_x + u_y v_y + u_z v_z = (2)(1) + (-1)(1) + (1)(2) = 3$ Karena $\lvert u\rvert = \sqrt{(2)^2 + (-1)^2 + (1)^2} = \sqrt{6}, \qquad \lvert v\rvert = \sqrt{(1)^2 + (1)^2 + (2)^2} = \sqrt{6}$ Maka $\cos\theta = \frac{u.v}{\lvert u\rvert.\lvert v\rvert} = \frac{3}{\sqrt{6}.\sqrt{6}} = \frac{1}{2}$ Atau $\theta = 60^0$	1 1 1
29	Penyelesaian: Persamaan garisnya dalam bentuk parameter. Diperoleh: x = 1 + 2t, y = -1 – t, z = 3t kemudian sisipkan pernyataan parameter x(t), y(t), dan z(t) di atas ke	1

	dalam persamaan bidang: 3x + 2y – z = 5, diperoleh persmaaan bagi t: 3(1+2t) + 2(-1-t) – (3t) = 5 atau t = 4 Sisipkan nilai t = 4 ini ke dalam persamaan parameter garis, memberikan koordinat titik potong P, yakni: x = 9, y = -5, z = 12	1 1
30	Penyelesaian: Menururt definisi fungsi periodic, periode fungsi adalah L = 2π; jadi p = 1, dan selang dasarnya adalah: -π ≤ x < π dengan a = -π. Diluar selang ini, f(x) didefinisikan sebagai perluasan periodiknya dalam selang dasar. Jadi koefisien fourier f(x) adalah: $a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}(1)dx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}(0)dx = 1,$ $a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\, dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}(1)\cos nx\, dx$ $b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\, dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}(1)\sin nx\, dx = -\frac{1}{n\pi}\left[\cos nx\right]_{-\pi}^{0}$ $= -\frac{1}{n\pi}(1 - \text{con}\, n\pi) = -\frac{1}{n\pi}\left(1-(-1)^n\right) = \begin{cases} -\frac{2}{n\pi} & n \text{ ganjil} \\ 0 & n \text{ genap} \end{cases}$ Dengan demikian, uraian fourier bagi fungsi f(x) adalah $f(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n}\left(1-(-1)^n\right)\sin nx$ $= \frac{1}{2} - \frac{2}{\pi}\left(\frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \ldots\right)$	 1 1 1
31	Penyelesaian: (a). Persamaan yang diberikan dapat ditulis sebagai $x(4+y^2)dz + y(1+x^2)\, dy = 0$ atau $\frac{x\,dx}{1+x^2} + \frac{y\,dy}{4+y^2} = 0$ Integralkan, $\frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right) + \frac{1}{2}\ln\left(4+y^2\right) = c_1$ Yaitu $\ln[(1+x^2)(4+y^2)] = 2c_1$ atau $(1+x^2)(4+y^2) = e^{2c_1} = c$ Jadi penyelesaian umum yang diinginkan adalah $(1+x^2)(4+y^2) = c$ (b). Untuk Penyelesaian khususnya di mana y(1) = 2, yaitu y = 2 bilamana x = 1, ambillah x = 1, y =2 dalam $(1+x^2)(4+y^2) = c$ untuk memeperoleh = 16. Jadi $(1+x^2)(4+y^2) = 16$	 1 1 1

32	Penyelesaian Kita mempunyai $dy/dx = 8 - 3y$, sehingga dengan memisahkan peubahnya $\frac{dy}{8-3y} = dz$ atau $\int \frac{dy}{8-3y} = \int dx$ Jadi $-\frac{1}{3}\ln(8-3y) = x + c_1$ Ambil $x = 0$ dan $y = 2$, diperoleh $-\frac{1}{3}\ln 2 = c_1$, dan penyelesaiannya yang diinginkan adalah $-\frac{1}{3}\ln(8-3y) = x - \frac{1}{3}\ln 2$ Penyelesaian ini juga dapat dituliskan sebagai $\frac{1}{3}\ln(8-3y) - \frac{1}{3}\ln 2 = -x$, $\ln(8-3y) - \ln 2 = -3x$ $\ln\left(\frac{8-3y}{2}\right) = -3x$, $\frac{8-3y}{2} = e^{-3x}$ atau akhirnya $y = \frac{2}{3}\left(4 - e^{-3x}\right)$ Pemeriksaan: Jika $y = \frac{2}{3}\left(4 - e^{-3x}\right)$ Maka $y(0) = \frac{2}{3}\left(4 - e^{0}\right) = \frac{2}{3}(3) = 2$ Juga $\frac{dy}{dx} = \frac{2}{3}\left(3e^{-3x}\right) = 2e^{-3x}$ sehingga $\frac{dy}{dx} + 3y = 2e^{-3x} + 3.\frac{2}{3}\left(4 - e^{-3x}\right) = 8$	1 1 1 1 1
33	Penyelesaian: Misalkan U = temperature obyek itu setelah t menit. Maka $\frac{dU}{dt} \propto U - 20$ atau $\frac{dU}{dt} = k(U - 20)$ Selesaikan , $U = 20 + ce^{kt}$, Pada $t = 0$, $U = 80$ sehingga $c = 60$ dan $U = 20 + 60e^{kt}$. Pada $t = 20$, $U = 60$ sehingga $e^{20k} = 2/3$, $e^k = (2/3)^{1/20}$. Maka $U = 20 + 60e^{kt} = 20 + 60(e^k)^t = 20 + 60\left(\frac{2}{3}\right)^{t/20}$ Bilamana $t = 40$, $U = 20 + 60(2/3)^2 = 46{,}7^{\circ}C$	1 1 1
	SKOR MAKSIMUM	100