__Deret__

1. Sebuah kelereng kecil yang dilepaskan jatuh menumbuk sebuah lantai datar tegar. Bila ketinggian kelereng cukup tinggi, maka akan terpantul berulang kali dari lantai ke udara dengan ketinggian yang semakin rendah hingga pada akhirnya berhenti di lantai. Tentukanlah jarak total yang ditempuh kelereng tersebut jika dijatuhkan dari ketinggian 1 m dan ketinggian yang dicapainya setelah terpantul adalah ¾ kali ketinggian sebelumnya.
   Penyelesaian:
   Ketinggian pencapaian kelereng secara berturut-turut adalah :
   $$1, \frac{3}{4}, \left(\frac{3}{4}\right)^2, \left(\frac{3}{4}\right)^3, ...$$
   Jadi, jarak total yang ditempuh kelereng adalah jumlah tinggi awal kelereng 1 m, ditambah 2 kali jumlah semua tinggi berikutnya (karena kelereng menempuh lintasan tegak bolak-balik yang sama panjang), yaitu :
   $$1, 2\left(\frac{3}{4}\right), 2\left(\frac{3}{4}\right)^2, 2\left(\frac{3}{4}\right)^3, + ...$$
   Penyataan jumlah bilangan yang dimulai dari suku kedua adalah deret ukur dengan a = 2(3/4) = 3/2, dan r = ¾. Karena itu jumlahnya adalah:
   $$S = \frac{(3/2)}{(1-(3/4))} = 6$$
   Jadi, deret di atas konvergen. Dari jumlah itu diperoleh:
   d = 1 + S = 7 m
   Jadi jarak total yang ditempuh kelereng adalah 7 m.
2. Tentukanlah suku ke-n dari deret dibawah ini:
   $$\tfrac{3}{10} + \tfrac{3}{10^2} + \tfrac{3}{10^3} + ...$$
   Penyelesaian:
   Suku ke-n dari deret di atas dapat ditulis dalam bentuk
   $$u_n = \tfrac{3}{10} + \tfrac{3}{10^2} + \tfrac{3}{10^3} + ... + \tfrac{3}{10^n} = \tfrac{3}{10}\left[1 + \tfrac{1}{10} + \tfrac{1}{10^2} + ... + \tfrac{1}{10^{n-1}}\right]$$
   Sekarang jika
   $$S = 1 + \tfrac{1}{10} + \tfrac{1}{10^2} + ... + \tfrac{1}{10^{n-1}}$$
   Maka
   $$\tfrac{1}{10}S = \tfrac{1}{10} + \tfrac{1}{10^2} + ... + \tfrac{1}{10^{n-1}} + \tfrac{1}{10^n}$$
   Sehingga dengan mengurangkannya diperoleh
   $$\tfrac{9}{10}S = 1 - \tfrac{1}{10^n} \text{ atau } S = \tfrac{10}{9}\left(1 - \tfrac{1}{10^n}\right)$$
   Jadi suku ke-n barisan ini adalah $u_n = \tfrac{1}{3}\left(1 - \tfrac{1}{10^n}\right)$ dan untuk $n \to \infty$, $u_n \to 1/3$.

3. Tentukan apakah deret ini konvergen atau divergen.

$$\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+\frac{1}{4.5}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}+\ldots$$

Penyelesaian :

Untuk menentukan S, harus dilakukan penjumlahan sebagian deret :

$S_1 = \frac{1}{2}$, $S_2 = \frac{1}{2}+\frac{1}{6}=\frac{2}{3}$, $S_3 = \frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}=\frac{3}{4}$,

Secara umum:

$$S_n = \frac{n}{(n+1)}$$

Sehingga:

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim \frac{n}{(n+1)} = 1$$

Karena S mempunyai harga limit tertentu, maka deret di atas adalah deret konvergen.

4. Tentukan selang konvergensi deret berikut:

$$1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{4}-\frac{x^3}{8}+\ldots+\frac{(-x)^n}{2^n}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-x)^n}{2^n}$$

Penyelesaiannya:

Suku ke-n deret di atas adalah $a_n = \frac{(-x)^n}{2^n}$

Nisbah suku berturutannya :

$$r_n = \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{(-x)^{n+1}}{2^{n+1}}\right|\left|\frac{2^n}{(-x)^n}\right| = \left|\frac{x}{2}\right|$$

Kemudian mengambil limitnya

$$r = \lim_{n\to\infty} r_n = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x}{2}\right| = \left|\frac{x}{2}\right|$$

Perhatikan bahwa kita telah mengambil nilai mutlak nisbah, karena variable x dapat bernilai positif atau negative. Agar deret (1) konvergen, maka menurut uji nisbah, disyaratkan $\left|\frac{x}{2}\right| < 1$ atau $-2 < x < 2$. Kita harus menyelidiki konvergensinya untuk nilai x di kedua selang ini.

Untuk x = 2, deret pangkat (1) memberi deret bilangan tetap:

$1 + 1 + 1 + 1 + \ldots +$

Suatu deret ukur dengan pembanding r =1, karena itu deret ini divergen.

Untuk x = 2, deret pangkat (1) memberi deret bilangan tetap:

$1 - 1 + 1 - 1 + \ldots +$

Suatu deret bolak balik dengan $|a_n| = 1$. Karena $|a_{n+1}| = |a_n|$, maka deret ini divergen.

Jadi selang konvergensi deret (1) adalah $-2 < x < 2$.

5. Carilah uraian Taylor fungsi eksponensial $f(x) = e^x$, disekitar x = 0, dan tentukan pula selang konvergensinya.

Penyelesaian:

Turunan semua orde fungsi $f(x) = e^x$ terhadap x disekitar x = 0, adalah.

$f(x) = f'(x) = \ldots f^{(n)}(x) = \ldots = e^x$

Karena itu,

$f(0) = f'(0) = \ldots f^{(n)}(x) = \ldots = 1$

Dengan demikian, uraian deret taylornya disekitar x = 0, adalah

$$f(x) = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \ldots + \frac{1}{n!}x^n + \ldots$$

Untuk menentukan selang konvergensi deret pangkatnya digunakan uji nisbah. Tinjau:

$$r = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|\left|\frac{n!}{x^n}\right| = |x| \lim_{n\to\infty}\left|\left(\frac{1}{n+1}\right)\right| = |x|.0 = 0 < 1$$

Jadi, selang konvergensinya adalah: $-\infty < x < \infty$.

<u>Bilangan Kompleks</u>

6. Nyatakan bilangan kompleks 2-2i dalam bentuk polar

   Penyelesaian:

   $r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$ dan

   $\theta = \arctan(-2/2) = 7\pi/4$

   Jadi,

   $2 + 2i = 2\sqrt{2}(\cos 7\pi/4 - i \sin 7\pi/4)$

7. Carilah nilai x dan y yang mememuhi persamaan kompleks 2ix + 3 = y - i.

   Penyelesaian:

   Tulis dahulu kedua belah ruas persamaannya dalam bentuk baku :

   $3 + i(2y) = y + i(-1)$

   Kemudian samakan bagian real dan imajiner kedua belah ruas, diperoleh persamaan real:

   3 = y, dan 2x = 1

   Pemecahannya adalah x = -1/2 , y = 3.

8. Tuliskan deret kompleks :

   $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1+i)^n}{n}$$

   Ke dalam kedua deret realnya, cukup hingga suku ke-3 nya.

   Penyelesaian:

   Pertama tuliskan dahulu pernyataan uraian kompleksnya:

   $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1+i)^n}{n} = \frac{(1+i)}{1} + \frac{(1+i)^2}{2} + \frac{(1+i)^3}{3} + \ldots$$

   $$= 1 + i + \tfrac{1}{2}\left(1 - 2i - i^2\right) + \tfrac{1}{3}\left(1 + 3i - 3i^2 + i^3\right) + \ldots$$

   Dengan menghitung masing-masing sukunya dan menggunakan $i^2 = -1$, kemudian mengelompokkan bagian imajinernya, diperoleh:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1+i)^n}{n}=\left|1+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{3}+\frac{3}{3}\right)+...\right|+i\left|1+\left(\frac{2}{2}\right)+\left(\frac{3}{3}-\frac{1}{3}\right)+...\right|$$

9. Ujilah konvergensi deret $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(1+i)^n}$

   Penyelesaian:
   Dengan uji nisbah, diperoleh
   $$r=\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{(1+i)^n}{(1+i)^{n+1}}\right|=\left|\frac{1}{(1+i)}\right|=\frac{1}{\sqrt{2}}<1$$
   Karena r < 1, maka deret ini adalah konvergen mutlak.
10. Periksalah kekonvergenan mutlak deret pangkat komplek
   $$1+z+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}+...+\frac{z^n}{n!}+...$$
   Penyelesaian:
   Suku ke-n deret di atas adalah
   $$Cn(z)=\frac{z^n}{n!},$$
   Jadi,
   $$r_n=\left|\frac{c_{n+1}}{c_{n+1}}\right|=\left|\frac{z^{n+1}}{(n+1)!}\frac{n!}{z^n}\right|=\frac{1}{(n+1)}|z|$$
   Karena, $r=\lim_{n\to+\infty}r_n=0<1$, untuk semua z, maka deret di atas adalah konvergen mutlak untuk semua nilai z.
11. Hitunglah $(1-i)^4$
   Penyelesaian:
   Jika z = 1 – I, maka r = $\sqrt{2}$, dan θ = 5π/4. Jadi bentuk eksponensialnya adalah
   $z=re^{i\theta}=\sqrt{2}\,e^{5i\pi/4}$, sehingga :
   $$(1-i)^4=\left(\sqrt{2}e^{5i\pi/4}\right)^4=4e^{5i\pi}=-4$$
12. Hitunglah sin (π + i Ln 3)
   Penyelesaian:
   $$\sin(\pi+i\,\mathrm{Ln}\,3)=\frac{e^{i(\pi+i\,\mathrm{Ln}\,3)}-e^{-i(\pi+i\,\mathrm{Ln}\,3)}}{2i}=\frac{e^{i\pi}e^{-\mathrm{Ln}\,3}-e^{-i\pi}e^{\mathrm{Ln}\,3}}{2i}$$
   Menurut definisi fungsi logaritma $e^{\ln 3}=3$, dan $e^{-\mathrm{Ln}\,3}=1/e^{\ln 3}=1/3$, sedangkan $e^{i\pi}=\cos\pi+i\sin\pi=-1$, dan $e^{-i\pi}=1/e^{i\pi}=1/(-1)=-1$, Jadi.
   $$\sin(\ \pi+i\ln 3)=\frac{(-1)(1/3-3)}{2!}=-\frac{4}{3}i$$
13. Hitunglah periode T pada pegas vertical. Jika m adalah massa benda, dan k adalah tetapan pegas.
   Penyelesaian:
   Diketahui bahwa pegas vertical merupakan gerak getaran harmonis yang mempunyai persamaan gerak :

$y = A \sin \omega t$ atau $y = a \cos \omega t$ (1)

dengan y kedudukan vertical benda terhadap titik setimbang pegas dengan beban. Karena persamaan gerak ini dalam bentuk sinus atau cosinus, maka digunakan fungsi eksponen bilangan kompleks yang sesuai, yaitu :

$$y = A\,e^{i\omega t} \tag{2}$$

Sehingga kita dapat mencari kecepatan $\frac{dy}{dt}$ dan percepatan $\frac{d^2y}{dt^2}$:

$$\frac{dy}{dt} = A\,i\omega\,e^{i\omega t} \tag{3}$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = A(i\omega)^2\,e^{i\omega t} = -A\,\omega^2\,e^{i\omega t} \tag{4}$$

Gunakan Hukum Newton II dan Hukum Hooke (dengan mengabaikan gaya berat pada benda):

$$\sum F = ma \tag{5}$$

$$-ky = m\frac{d^2y}{dt^2} \tag{6}$$

Sisipkan persamaan (2) dan (4) ke dalam persamaan (6), sehingga diperoleh :

$$-kAe^{i\omega t} = -mA\omega^2e^{i\omega t}$$

$$\omega^2 = \frac{k}{m} \qquad \text{atau} \qquad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$T = 2\pi f = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

Jadi, periode pada pegas vertikal ini adalah ini adalah T = $2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$.

Matriks

14. Hitunglah C = AB, jika:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -3 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \text{ dan } B = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Penyelesaian:

$$C = AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -3 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (1)(2)+(2)(1)+(-1)(3) & (1)(4)+(2)(-1)+(-1)(1) \\ (3)(2)+(1)(1)+(0)(3) & (3)(4)+(1)(-1)+(1)(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 14 & 11 \end{bmatrix}$$

15. Hitunglah determinan matriks koefisien persamaan berikut dengan menggunakan kofaktor dari elemen-elemen kolom ketiga:

$$\begin{aligned} 2x + y - z &= 2 \\ x - y + z &= 7 \\ 2x + 2y + x &= 4 \end{aligned}$$

Penyelesaian:

Kofaktor dari elemen kolom ketiga, -1, 1, dan 1, berturut-turut dinyatakan oleh K_{13}, K_{23}, K_{33} adalah:

$$K_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 4$$

$$K_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -2$$

$$K_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -3$$

Sehingga determinan matriknya adalah:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = (-1)K_{13} + (1)K_{23} + (1)K_{33} = (-1)(4) + (1)(-2) + (1)(-3) = -9$$

16. Pecahkan system persamaan linear berikut dengan menggunakan aturan Cramer.

$$\begin{aligned} 2x + y - z &= 2 \\ x - y + z &= 7 \\ 2x + 2y + x &= 4 \end{aligned}$$

Penyelesaian:

$$D = \det(A) = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -9; \qquad U_x = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 7 & -1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -27$$

$$U_y = \begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 1 & 7 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 18; \qquad U_z = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 7 \\ 2 & 2 & 4 \end{vmatrix} = -18$$

Maka menurut metode Cramer, pemecahan untuk x, y, dan z berturut-turut adalah:

$$x = \frac{U_x}{D} = \frac{-27}{-9} = 3; \quad y = \frac{U_y}{D} = \frac{18}{-9} = -2; \quad z = \frac{U_z}{D} = \frac{-18}{-9} = 2$$

17. Hitunglah matriks invers dari matriks berikut:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

Penyelesaian:

Pada contoh di atas kofaktor dari elemen-elemennya pada kolom ketiga, yakni K_{13}, K_{23}, K_{33}. Dengan menghitung elemen kolom 1 dan 2, diperoleh matriks kofaktor

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \operatorname{cof}(A) = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 4 \\ -3 & 4 & -2 \\ 0 & -3 & -3 \end{bmatrix}$$

Karena adjoint dari A adalah transpose dari cof (A), maka

$$\operatorname{adj}(A) = \begin{bmatrix} -3 & -3 & 0 \\ 1 & 4 & -3 \\ 4 & -2 & -3 \end{bmatrix}$$

Determinan dari A juga telah dihitung pada contoh soal sebelumnya, yang hasilnya adalah det(A) = -9. Dengan demikian invers matriks A adalah

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \text{ x } \operatorname{adj}(A) = -(1/9) \begin{bmatrix} -3 & -3 & 0 \\ 1 & 4 & -3 \\ 4 & -2 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/3 & 1/3 & 0 \\ -1/9 & -4/9 & 1/3 \\ -4/9 & 2/9 & 1/3 \end{bmatrix}$$

18. Hitunglah x, y, z dalam persamaan linear:

$$\begin{aligned} x + z &= 1 \\ 2x + z &= 0 \\ x + y + z &= 1 \end{aligned}$$

Penyelesaian :

Dari persamaan Linear diperoleh:

$$x = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \qquad A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Dari persamaan di atas dapat dihitung :

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 - 1 = 1$$

Dan

$$K = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Jadi

$$K^T = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Dengan menggunakan metode matriks kofaktor

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} K^T = \frac{1}{1} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Sehingga penyelesaian persamaan linear dapat dilakukan dengan menggunakan persamaan sebagai berikut:

$$X = A^{-1}b$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1+0+0 \\ -1+0+1 \\ 2+0+0 \end{bmatrix} =$$

19. Carilah nilai-eigen dan vector-eigen yang bersesuaian dari matriks

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Penyelesaian:

Untuk mencari nilai eigen harus dibentuk ke dalam persamaan karakteristik kemudian mencari akar-akar karakteristiknya. Persamaan karakteristik yang bersangkutan adalah:

$$\det(A - \lambda I) = \begin{bmatrix} (1-\lambda) & 1 & 3 \\ 1 & (5-\lambda) & 1 \\ 3 & 1 & (1-\lambda) \end{bmatrix} = 0$$

Atau, $\lambda^3 - 7\lambda^2 + 36 = 0$

Akar-akarnya adalah:

$\lambda_{(1)} = 6, \quad \lambda_{(2)} = 3, \quad \lambda_{(3)} = -2$

Sedangkan untuk menentukan vector-eigen dilakuakn dengan menuliskan persamaan eigen dalam komponen vector-eigen kemudian mencari pemecahannya untuk setiap nilai-eigen.

Karena A berukuran (3 x 3), maka vector-eigen X memiliki tiga komponen, $X^T = [x \;\; y \;\; z]^T$, sehingga system persamaan nilai-eigen yang bersangkutan adalah:

$$\begin{aligned} (1-\lambda)x + \quad y + \quad 3z &= 0 \\ x + (5-\lambda)y + \quad 3z &= 0 \\ x + \quad y + (3-\lambda)z &= 0 \end{aligned}$$

Untuk memecahkan persamaan homogen ini, pilih secara bebas nilai bagi x, atau y, atau z; kemudian sisipkan satu nilai tertentu, dan pecahkan bagi variable yang sisa.

Misalkan dipilih x = 1, maka pernyataan komponen eigen yang bersangkutan adalah:

Untuk:

$\lambda_{(1)} = 6, \qquad X_{(1)}^T = [1 \;\; 2 \;\; 1]^T$

$\lambda_{(2)} = 3, \qquad X_{(2)}^T = [1 \;\; -1 \;\; 1]^T$

$\lambda_{(3)} = -2, \qquad X_{(3)}^T = [1 \;\; 0 \;\; -1]^T$

Karena persamaan linear matriks:$aX_{(1)} + b\,X_{(2)} + cX_{(3)} = 0$, hanyalah dipenuhi untuk a = b = c = 0, maka ketiga vector-eigen ini bebas linear. Dengan menormalisasi, diperoleh vector-eigen ternormalisasi:

$$\hat{X}^T_{(1)} = \frac{1}{\sqrt{6}} X^T_{(1)}, \qquad \hat{X}^T_{(2)} = \frac{1}{\sqrt{3}} X^T_{(2)}, \qquad \hat{X}^T_{(3)} = \frac{1}{\sqrt{2}} X^T_{(3)}$$

Karena, $\hat{X}^T_{(1)} \hat{X}_{(2)} = \hat{X}^T_{(1)} \hat{X}^T_{(3)} = \hat{X}^T_{(2)} \hat{X}_{(3)} = 0$, maka ketiga vector-eigen ini membentuk suatu himpunan vector-eigen ortonormal.

Turunan Parsial

20. Hitunglah turunan parsial $\frac{\partial f}{\partial x}$ dan $\frac{\partial f}{\partial y}$ dari $f(x,y) = xy^2 - \sin(xy)$

Penyelesaian:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(xy^2 - \sin(xy)\right) = y^2 - y\cos(xy)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(xy^2 - \sin(xy)\right) = 2xy - x\cos(xy)$$

21. Hitunglah diferensial total fungsi $f(x,y) = xy^2 - \sin(xy)$

Penyelesaian:

Karena $\frac{\partial f}{\partial x} = y^2 - y\cos(xy)$ dan $\frac{\partial f}{\partial y} = 2xy - x\cos(xy)$ kontinu, maka diferensial totalnya adalah:

$$df = \left[y^2 - y\cos(xy)\right]dx + \left[2xy - x\cos(xy)\right]dy$$

22. Jika $f = x^2 + 2xy - y \ln z$, dengan $x = u + v^2$, $y = u - v^2$, dan $z = 2u$, tentukanlah $\frac{\partial f}{\partial u}$, dan $\frac{\partial f}{\partial v}$.

Penyelesaian:

$$\frac{\partial f}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial u}$$

$$= (2x + 2y)(1) + (2x - \ln z)(1) + (-y/z)(2)$$

$$= 4x + 2y - \ln z - 2y/z$$

$$\frac{\partial f}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial v}$$

$$= (2x + 2y)(2v) + (2x - \ln z)(-2v) + (-y/z)(0)$$

$$= 4vy + 2v \ln z$$

23. Tentukan $\frac{\partial z}{\partial x}$ dan $\frac{\partial z}{\partial y}$ dari persamaan: $x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$.

Penyelesaian:

Dari fungsi implisit: $\phi(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$,

$$\frac{\partial\phi}{\partial x}=2x,\ \ \frac{\partial\phi}{\partial y}=2y,\ \ \frac{\partial\phi}{\partial z}=2z$$

Maka:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{(\partial\phi/\partial x)}{(\partial\phi/\partial z)}=-\frac{x}{z},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{(\partial\phi/\partial y)}{(\partial\phi/\partial z)}=-\frac{y}{z},$$

24. Dalam Termodinamika didapat persamaan $f(p, V, T) = 0$. p tekanan, V volume, dan T temperatur. Buktikanlah:

$$\left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_T\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_V=-\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_V$$

Penyelesaian:

$$df=\left(\frac{\partial f}{\partial p}\right)_{V,T}dp+\left(\frac{\partial f}{\partial V}\right)_{p,T}dV+\left(\frac{\partial f}{\partial T}\right)_{p,V}dT=0$$

Jika salah satu variable p, V, atau T dibuat tetap, maka salah satu dp, dV, atau dT sama dengan nol.Diperoleh:

$$\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p=-\left[\frac{\left(\frac{\partial f}{\partial T}\right)_{p,V}}{\left(\frac{\partial f}{\partial V}\right)_{p,T}}\right]=\frac{1}{\left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_p}$$

$$\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_V=-\left[\frac{\left(\frac{\partial f}{\partial p}\right)_{T,V}}{\left(\frac{\partial f}{\partial T}\right)_{p,V}}\right]=\frac{1}{\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V}$$

$$\left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_p=-\left[\frac{\left(\frac{\partial f}{\partial V}\right)_{p,T}}{\left(\frac{\partial f}{\partial p}\right)_{T,V}}\right]=\frac{1}{\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T}$$

Perkalian ketiga turunan parsial indigen cara sebagai berikut :

$$\left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_T\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p=-\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_V$$

Maka

$$\left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_T\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_V=-1$$

Integral Lipat dan Transformasi koordinat

25. Hitunglah integral lipat dua berikut.

$$I = \int_{x=0}^{1} \left(\int_{y=0}^{x^2} x\,y\,dy \right) dx$$

Penyelesaian:

Integralkan terhadap y dengan mempertahankan x tetap:

$$\int_{0}^{x^2} (xy)\,dy = \tfrac{1}{2} xy^2 \Big]_0^{x^2} = \tfrac{1}{2} x\left((x^2)^2 - 0^2 \right) = \tfrac{1}{2} x^5$$

Kemudian integralkan hasil di atas terhadap x, diperoleh:

$$I = \int_{0}^{1} \left(\tfrac{1}{2} x^5 \right) dx = \frac{1}{12} x^6 \Big]_0^1 = \frac{1}{12}$$

26. Gunakan koordinat polar (r, θ) untuk menghitung integral lipat dua berikut:

$$I = \iint_{D_{xy}} xy\,dxdy$$

Dengan D_{xy} adalah daerah pada kuadran I dalam bidang xy yang dibatasi oleh sumbu x, sumbu y, dan lingkaran $x^2 + y^2 = 4$.

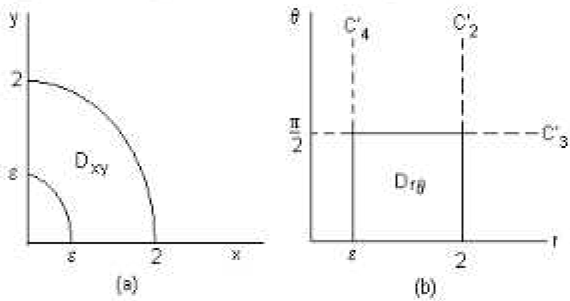
Penyelesaian:

Langkah 1: tentukan peralihan integran f (x, y) ke g (r, **q***).*

Karena, f(x, y) = xy, maka terhadap transformasi koordinat polar (r, θ), dinyatakan dalam bentuk:

$g(r, \theta) = f(x(r, \theta), y(r, \theta)) = r^2 \cos\theta \sin\theta$.

Langkah II: menggambarkan daerah integrasi D_{xy}



Gambar (a) . daerah integrasi D_{xy} dan (b) peta $D_{r\theta}$.

Dari gambar, D_{xy} tampak dibatasi oleh tiga kurva, yaitu :

C_1 : $y = 0, \ \ 0 \le x \le 2$,

C_2 : $x^2 + y^2 = 4$,

C_3 : $x = 0, \ \ 0 \le y \le 2$,

Yang diperlihatkan pada gambar bagian (a). Karena factor Jacobi, J = r, bernilai nol di titik O, r = 0, maka untuk menghindari kesingularan ini, dibentuk kurva batas ke-4, C_4, berupa lingkaran:

C_4 : $x^2 + y^2 = \varepsilon^2$, $0 < \varepsilon , < 2$

Dan pada akhirnya mengambil limit $\varepsilon \to 0$.

Langkah 3. Menggambarkan peta daerah integrasi D_{rq}:

Untuk menggambarkan peta daerah D_{xy} pada bidang $r\theta$, kita petakan masing-masing kurva batas lalu mencirikan daerah batas yang diperoleh.

C_1 : $y = 0$, $\varepsilon \le x < 2$, dipetakan ke kurva:

C'_1: $r = \sqrt{x^2 + y^2} = x$, $\theta = \tan^{-1}(y/x) = 0$

Pada bidang (r, θ), x adalah parameter kurva C'; jadi, C' adalah selang terbuka $\varepsilon \le r < 2$ pada sumbu r.

C_2 : $x^2 + y^2 = 4$, dipetakan ke kurva:

C'_2: $r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{4} = 2$, $\theta = \tan^{-1}(y/x) = \tan^{-1}(y/\sqrt{4-y^2})$

Disini y adalah parameter kurva C'_2 pada bidang (r,θ). Karena $0 \le y \le 2$, maka $0 \le \theta \le \pi/2$. Jadi C'_2 adalah penggal garis sejajar sumbu θ yang memotong sumbu r di r = 2.

Dengan cara yang sama, C_3 dipetakan ke penggal garis C'_3 sejajar sumbu r, yangmemotong sumbu θ di $\theta = \pi/2$, dan terletak antara $\varepsilon \le r < 2$. C_4 dipetakan ke penggal garis C'_3 sejajar sumbu θ, antara $0 \le \theta \le \pi/2$, yang memotong sumbu r di $r = \varepsilon < 2$.

Keempat kurva dalam bidang (r, θ) ini, membatasi daerah $D_{r\theta}$ berbentuk empat persegi panjang. Seperti gambar (b).

Jadi, terhadap koordinat polar, integral lipat dua mejadi:

$$I = \iint_{D_{r\theta}} \left(r^2 \cos\theta \sin\theta\right)(r)\,dr d\theta$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{r=\varepsilon}^{2} \left(r^3 dr\right) \int_{\theta=0}^{\pi/2} (\cos\theta \sin\theta)\,d\theta$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \left[\frac{1}{4} r^4\right]_{\varepsilon}^{2} . \left[-\frac{1}{2}\cos^2\theta\right]_{\theta=0}^{\pi/2} = 2$$

27. Hitunglah massa total dan koordinat z pusat massa benda yang menempati volume di dalam kerucut eliptik :

$$\frac{z^2}{h^2} = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}, \quad 0 \le z \le h,$$

Jika rapat massanya p =c, sebuah tetapan. Gunakanlah koordinat silinder

Penyelesaian:

Jika $f(x, y, z) = \rho(x, y, z)$ adalah rapat massa benda yang menempati volume ruang V, maka massa total benda adalah:

$$M = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} \rho\left(x_k, y_k, z_k\right) dV_k = \iiint p\,dV = c\iiint dx dy dz$$

Untuk menggunakan koordinat silinder, pertama lakukan transformasi koordinat :

$x = ax'$; $y = by'$; $z = z'$

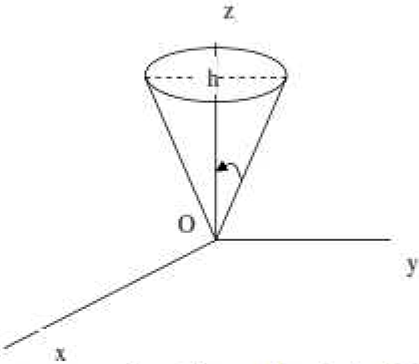
yang memiliki factor Jacobi J = ab. Persamaan permukaan kerucut eliptik dalam koordinat (x', y', z) adalah : $z^2 = h^2 (x'^2 + y'^2)$, yang memperlihatkan simetri silinder terhadap sumbu-z. Selanjutnya, terhadap koordinat (x', y', z) ini, lakukan transformasi ke koordinat silinder $(r, 0, z)$:

$x' = r \cos\theta$; $y' = r \sin\theta$; $z = z$

dalam mana persamaan kerucut tersederhanakan menjadi :

$$z^2 = h^2r^2$$

Pada gambar di bawah,



tampak volume V normal terhadap bidang x'y', dengan permukaan batas bawah adalah permukaan kerucut eliptik $z_1 = hr$ dan bidang $z_2 = h$ sebagai batas atasnya. Jadi integral berulang massa benda adalah :

$$M = abc\iiint_V dx'dy'dz' = (abc)\iint_D \left(\int_{hr}^{h} dz\right) rdrd\theta$$

$$= (abc)\iint_D h(1-r)\, rdrd\theta$$

Proyeksi gabungan permukaan batas volume ruang ini pada bidang x'y' adalah piringan lingkaran dengan batas lingkaran berjari-jari r = 1.Jadi.

$$M = (abc)\int_{r=0}^{1}\int_{\theta=0}^{2\pi} h(1-r)\, r\, dr\, d\theta = \frac{\pi}{3}h(abc)$$

Untuk menghitung koordinat z pusat massa benda, kita hitung dahulu momen massanya terhadap bidang xy, M_{xy} Dengan cara yang sama diperoleh :

$$M_{xy} = abc\iiint_V z\, dx'dy'dz' = (abc)\iint_D \left(\int_{hr}^{h} zdz\right) rdrd\theta$$

$$= \frac{1}{2}(abc)\iint_D h^2\left(1-r^2\right) rdrd\theta$$

$$= \frac{1}{2}(abc)h^2\int_{r=0}^{1}\int_{\theta=0}^{2\pi}\left(r-r^3\right) dr\, d\theta = \frac{\pi}{4}h^2(abc)$$

Jadi, koordinat Z pusat massa benda, adalah:

$$Z = \frac{M_{xy}}{M} = \frac{\left(\frac{\pi}{4}h^2(abc)\right)}{\left(\frac{\pi}{3}h(abc)\right)} = \frac{3}{4}h$$

Analisis Vektor

28. Diketahui dua vector $u = 2\hat{i} - 3\hat{j} + 6\hat{k}$, dan $v = 4\hat{i} - 2\hat{j} - 4\hat{k}$ Tentukan jumlah vector u + v, dan besarnya.

 Penyelesaian:

 $u + v = \left(2\hat{i} - 3\hat{j} + 6\hat{k}\right) + \left(4\hat{i} - 2\hat{j} - 4\hat{k}\right) = 6\hat{i} - 5\hat{j} + 2\hat{k}$

 Besarnya:

 $|u + v| = \sqrt{(6)^2 + (-5)^2 + (2)^2} = \sqrt{65} = 8{,}06$

29. Diketahui dua vector $u = 2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$, dan $v = \hat{i} + \hat{j} + 2\hat{k}$ carilah u .v dan tentukan sudut θ antara u dan v.

 Penyelesaian:

 $u.v = u_x v_x + u_y v_y + u_z v_z = (2)(1) + (-1)(1) + (1)(2) = 3$

 Karena

 $|u| = \sqrt{(2)^2 + (-1)^2 + (1)^2} = \sqrt{6}, \qquad |v| = \sqrt{(1)^2 + (1)^2 + (2)^2} = \sqrt{6}$

 Maka

 $$\cos\theta = \frac{u.v}{|u|.|v|} = \frac{3}{\sqrt{6}.\sqrt{6}} = \frac{1}{2}$$

 Atau $\theta = 60^o$

30. Carilah koordinat titik potong P dari garis : $\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z}{3}$, dengan bidang $3x + 2y - z = 5$

 Penyelesaian:

 Persamaan garisnya dalam bentuk parameter. Diperoleh:

 x = 1 + 2t, y = -1 – t, z = 3t

 kemudian sisipkan pernyataan parameter x(t), y(t), dan z(t) di atas ke dalam persamaan bidang:

 3x + 2y – z = 5, diperoleh persmaaan bagi t:

 3(1+2t) + 2(-1-t) – (3t) = 5 atau

 t = 4

 Sisipkan nilai t = 4 ini ke dalam persamaan parameter garis, memberikan koordinat titik potong P, yakni:

 x = 9, y = -5, z = 12

Deret Fourier

31. Diketahui fungsi:

 $$f(x) = \begin{cases} 1, & \pi \le x < 0, \\ 0, & 0 \le x < \pi, \end{cases}$$

 Periodik dengan periode 2π, f(x ± 2π) = f(x).

 Penyelesaian:

Menururt definisi fungsi periodic, periode fungsi adalah $L = 2\pi$; jadi $p = 1$, dan selang dasarnya adalah: $-\pi \le x < \pi$ dengan $a = -\pi$. Diluar selang ini, f(x) didefinisikan sebagai perluasan periodiknya dalam selang dasar.
Jadi koefisien fourier f(x) adalah:

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}(1)\,dx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}(0)\,dx = 1,$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}(1)\cos nx\,dx$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}(1)\sin nx\,dx = -\frac{1}{n\pi}\Big[\cos nx\Big]_{-\pi}^{0}$$

$$= -\frac{1}{n\pi}(1-\operatorname{con} n\pi) = -\frac{1}{n\pi}\left(1-(-1)^n\right) = \begin{cases} -\frac{2}{n\pi} & n \text{ ganjil} \\ 0, & n \text{ genap} \end{cases}$$

Dengan demikian, uraian fourier bagi fungsi f(x) adalah

$$f(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n}\left(1-(-1)^n\right)\sin nx$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{2}{\pi}\left(\frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \dots\right)$$

Persamaan Diferensial Biasa

32. (a). Tentukan penyelesaian umum dari $(4x + xy^2)\,dz + (y + x^2y)dy = 0$
(b). Tentukanlah penyelesaian khusus yang memenuhi $y(1) = 2$.

Penyelesaian:
(a). Persamaan yang diberikan dapat ditulis sebagai $x(4+y^2)dz + y(1+x^2)\,dy = 0$ atau

$$\frac{x\,dx}{1+x^2} + \frac{y\,dy}{4+y^2} = 0$$

Integralkan,

$$\tfrac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right) + \tfrac{1}{2}\ln\left(4+y^2\right) = c_1$$

Yaitu

$$\ln[(1+x^2)(4+y^2)] = 2c_1 \text{ atau } (1+x^2)(4+y^2) = e^{2c_1} = c$$

Jadi penyelesaian umum yang diinginkan adalah $(1+x^2)(4+y^2) = c$

(b). Untuk Penyelesaian khususnya di mana $y(1) = 2$, yaitu $y = 2$ bilamana $x = 1$, ambillah $x = 1$, $y = 2$ dalam $(1+x^2)(4+y^2) = c$ untuk memeperoleh $= 16$. Jadi $(1+x^2)(4+y^2) = 16$

33. Selesaikanlah masalah nilai batas $\frac{dy}{dx} + 3y = 8$, $y(0) = 2$.

Penyelesaian

Kita mempunyai dy/dx = 8 – 3y, sehingga dengan memisahkan peubahnya

$$\frac{dy}{8-3y}=dz \text{ atau } \int\frac{dy}{8-3y}=\int dx$$

Jadi

$$-\tfrac{1}{3}\ln(8-3y)=x+c_1$$

Ambil x = 0 dan y= 2, diperoleh $-\tfrac{1}{3}\ln 2=c_1$, dan penyelesaiannya yang diinginkan adalah

$$-\tfrac{1}{3}\ln(8-3y)=x-\tfrac{1}{3}\ln 2$$

Penyelesaian ini juga dapat dituliskan sebagai

$$\tfrac{1}{3}\ln(8-3y)-\tfrac{1}{3}\ln 2=-x,$$

$$\ln(8-3y)-\ln 2=-3x$$

$$\ln\left(\frac{8-3y}{2}\right)=-3x,\ \frac{8-3y}{2}=e^{-3x} \text{ atau akhirnya}$$

$$y=\frac{2}{3}\left(4-e^{-3x}\right)$$

Pemeriksaan:

Jika $y=\tfrac{2}{3}\left(4-e^{-3x}\right)$

Maka $y(0)=\tfrac{2}{3}\left(4-e^{0}\right)=\tfrac{2}{3}(3)=2$

Juga $\dfrac{dy}{dx}=\tfrac{2}{3}\left(3e^{-3x}\right)=2e^{-3x}$ sehingga

$$\frac{dy}{dx}+3y=2e^{-3x}+3.\tfrac{2}{3}\left(4-e^{-3x}\right)=8$$

34. Hukum Newton untuk pendinginan menyatakan bahwa laju perubahan temperature suatu obyek berubah sesuai dengan perbedaan temperature di antara obyek dan daerah sekitarnya. Jika suatu obyek didinginkan dari 80°C sampai 60°C dalam 20 menit, tentukanlah temperaturnya setelah 40 menit jika temperature sekitarnya adalah 20°C.

Penyelesaian:

Misalkan U = temperature obyek itu setelah t menit. Maka

$$\frac{dU}{dt}\propto U-20 \text{ atau } \frac{dU}{dt}=k(U-20)$$

Selesaikan , $U = 20+ ce^{kt}$, Pada t = 0, U = 80 sehingga c = 60 dan $U = 20 + 60e^{kt}$. Pada t = 20, U = 60 sehingga $e^{20k} = 2/3$, $e^{k} = (2/3)^{1/20}$. Maka

$$U=20+60e^{kt}=20+60(e^{k})^{t}=20+60\left(\tfrac{2}{3}\right)^{t/20}$$

Bilamana t = 40, $U = 20 + 60(2/3)^2 = 46{,}7°C$