

TES URAIAN

- Mata Kuliah : Fisika Matematika I
Waktu : 315 menit untuk ujian mid semester
(dibagi menjadi 2 kali ujian)
180 menit untuk ujian akhir semester

UJIAN MID SEMESTER

Deret

1. Sebuah kelereng kecil yang dilepaskan jatuh menumbuk sebuah lantai datar tegar. Bila ketinggian kelereng cukup tinggi, maka akan terpantul berulang kali dari lantai ke udara dengan ketinggian yang semakin rendah hingga pada akhirnya berhenti di lantai. Tentukanlah jarak total yang ditempuh kelereng tersebut jika dijatuhkan dari ketinggian 1 m dan ketinggian yang dicapainya setelah terpantul adalah $\frac{3}{4}$ kali ketinggian sebelumnya.
2. Tentukan apakah deret ini konvergen atau divergen.
$$\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \frac{1}{4.5} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} + \dots$$
3. Tentukan selang konvergensi deret berikut:
$$1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} - \frac{x^3}{8} + \dots + \frac{(-x)^n}{2^n} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x)^n}{2^n}$$
4. Carilah uraian Taylor fungsi eksponensial $f(x) = e^x$, disekitar $x = 0$, dan tentukan pula selang konvergennya.

Bilangan Kompleks

5. Nyatakan bilangan kompleks $2-2i$ dalam bentuk polar
6. Carilah nilai x dan y yang memenuhi persamaan kompleks $2ix + 3 = y - i$.
7. Tuliskan deret kompleks :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1+i)^n}{n}$$

Ke dalam kedua deret realnya, cukup hingga suku ke-3 nya.

8. Ujilah konvergensi deret $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1+i)^n}$
9. Periksa konvergensi mutlak deret pangkat kompleks

$$1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots + \frac{z^n}{n!} + \dots$$

10. Hitunglah $(1-i)^4$
11. Hitunglah $\sin(\pi + i \ln 3)$

12. Hitunglah periode T pada pegas vertikal. Jika m adalah massa benda, dan k adalah tetapan pegas.

Matriks

13. Hitunglah $C = AB$, jika:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -3 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \text{ dan } B = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

14. Hitunglah determinan matriks koefisien persamaan berikut dengan menggunakan kofaktor dari elemen-elemen kolom ketiga:

$$\begin{aligned} 2x + y - z &= 2 \\ x - y + z &= 7 \\ 2x + 2y + x &= 4 \end{aligned}$$

15. Pecahkan system persamaan linear berikut dengan menggunakan aturan Cramer.

$$\begin{aligned} 2x + y - z &= 2 \\ x - y + z &= 7 \\ 2x + 2y + x &= 4 \end{aligned}$$

16. Hitunglah matriks invers dari matriks berikut:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

17. Hitunglah x, y, z dalam persamaan linear:

$$\begin{aligned} x + z &= 1 \\ 2x + z &= 0 \\ x + y + z &= 1 \end{aligned}$$

18. Carilah nilai-eigen dan vector-eigen yang bersesuaian dari matriks

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Turunan Parsial

19. Hitunglah turunan parsial $\frac{\partial f}{\partial x}$ dan $\frac{\partial f}{\partial y}$ dari $f(x,y) = xy^2 - \sin(xy)$

20. Hitunglah diferensial total fungsi $f(x,y) = xy^2 - \sin(xy)$

21. Jika $f = x^2 + 2xy - y \ln z$, dengan $x = u + v^2$, $y = u - v^2$, dan $z = 2u$,

$$\text{tentukanlah } \frac{\partial f}{\partial u}, \text{ dan } \frac{\partial f}{\partial v}.$$

22. Tentukan $\frac{\partial z}{\partial x}$ dan $\frac{\partial z}{\partial y}$ dari persamaan: $x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$.

23. Dalam Termodinamika didapat persamaan $f(p, V, T) = 0$, p tekanan, V volume, dan T temperatur. Buktikanlah:

$$\left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_T \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p = -\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_V$$

UJIAN AKHIR SEMESTER

Integral Lipat dan Transformasi koordinat

24. Hitunglah integral lipat dua berikut.

$$I = \int_1^4 \left(\int_{y=0}^{x^2} xy \, dy \right) dx$$

Penyelesaian:

Integralkan terhadap y dengan mempertahankan x tetap:

$$\int_0^{x^2} (xy) \, dy = \frac{1}{2} xy^2 \Big|_0^{x^2} = \frac{1}{2} x \left((x^2)^2 - 0^2 \right) = \frac{1}{2} x^5$$

Kemudian integralkan hasil di atas terhadap x , diperoleh:

$$I = \int_1^4 \left(\frac{1}{2} x^5 \right) dx = \frac{1}{12} x^6 \Big|_1^4 = \frac{1}{12}$$

25. Gunakan koordinat polar (r, θ) untuk menghitung integral lipat dua berikut:

$$I = \iint_{D_{xy}} xy \, dx \, dy$$

Dengan D_{xy} adalah daerah pada kuadran I dalam bidang xy yang dibatasi oleh sumbu x , sumbu y , dan lingkaran $x^2 + y^2 = 4$.

26. Hitunglah massa total dan koordinat z pusat massa benda yang menempati volume di dalam kerucut eliptik :

$$\frac{z^2}{h^2} = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}, \quad 0 \leq z \leq h,$$

Jika rapat massanya $p=c$, sebuah tetapan. Gunakanlah koordinat silinder

Vektor

27. Diketahui dua vektor $u = 2\hat{i} - 3\hat{j} + 6\hat{k}$, dan $v = 4\hat{i} - 2\hat{j} - 4\hat{k}$. Tentukan jumlah vektor $u + v$, dan besarnya.
28. Diketahui dua vektor $u = 2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$, dan $v = \hat{i} + \hat{j} + 2\hat{k}$. Carilah $u \cdot v$ dan tentukan sudut θ antara u dan v .
29. Carilah koordinat titik potong P dari garis : $\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z}{3}$, dengan bidang $3x + 2y - z = 5$

Deret Fourier

30. Diketahui fungsi:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \pi \leq x < 2\pi, \\ 0, & 0 \leq x < \pi. \end{cases}$$

Periodik dengan periode 2π , $f(x \pm 2\pi) = f(x)$.

Uraikan ke dalam deret Fourier.

Persamaan Diferensial Biasa

31. (a). Tentukan penyelesaian umum dari $(4x + xy^2) dz + (y + x^2y) dy = 0$
 (b). Tentukanlah penyelesaian khusus yang memenuhi $y(1) = 2$.
32. Selesaikanlah masalah nilai batas $\frac{dy}{dx} + 3y = 8$, $y(0) = 2$.
33. Hukum Newton untuk pendinginan menyatakan bahwa laju perubahan temperature suatu obyek berubah sesuai dengan perbedaan temperature di antara obyek dan daerah sekitarnya. Jika suatu obyek didinginkan dari 80°C sampai 60°C dalam 20 menit, tentukanlah temperaturnya setelah 40 menit jika temperature sekitarnya adalah 20°C .